SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

INSIEMI DI LIVELLO DELLA SOLUZIONE FONDAMENTALE E DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER EQUAZIONI DI KOLMOGOROV

15 DICEMBRE 1988

I risultati esposti in questa nota fanno parte di un lavoro in collaborazione con E. Lanconelli [GL].

L'equazione di Kolmogorov in tre dimensioni si scrive così

$$(1) \qquad Lu = D_{yy}u - yD_z u - D_t u = 0 \quad \text{in } R^3.$$

L'assenza del termine $D_{zz}u$ in (1) rende l'operatore L degenere. In un lavoro apparso in Annals of Math. (1934) Kolmogorov [K] dimostrò che, sotto opportune condizioni la densità di probabilità di un sistema con 2n gradi di libertà soddisfa un'equazione di tipo Fokker-Planck, cioè

$$(2) \qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{y_i y_j} u - \sum_{i=1}^{n} (y_i D_{z_i} u + a_i D_{y_i} u) + au - D_t u = 0,$$

dove $a_{ij} = a_{ji}$, e i coefficienti a_{ij}, a_i, a dipendono dalle variabili $y,z \in R^n$, $t \in R$. E' ovvio che (1) è un caso particolare di (2), se in quest'ultimo si prende $n=1$, $a_{11}=1$, $a_1=0$, $a=0$.

Kolmogorov costruì una soluzione fondamentale della (1), C^∞ fuori della diagonale, così provando che L in (1) è un operatore ipoellittico. Più tardi, Weber (1951) [W] e Il'in (1964) [I] hanno dimostrato l'esistenza di una soluzione fondamentale dell'equazione di Fokker-Planck (2) mediante il metodo della parametrice di Levi.

L'equazione di Kolmogorov appartiene alla classe degli operatori del tipo

$$(3) \qquad L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 - X_0 \quad \text{in } R^{n+1},$$

dove $X_0, X_1, \ldots, X_p$ sono operatori differenziali del primo ordine a coefficienti C^∞, e verificanti la condizione di Hörmander: *il rango dell'algebra di Lie generata da* $X_0, X_1, \ldots, X_p$ *è* $n+1$ *in ogni punto.* Per mettere (1) nella forma di (3)

basta prendere $X_1 = D_y$, $X_0 = yD_z - D_t$. Quando (3) assume la forma particolare

$$(4) \qquad L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 - D_t \quad \text{in} \quad R^{n+1},$$

e $X_1,\ldots,X_p$ non dipendono dalla variabile t, molto si sa sulla soluzione fondamentale Γ. Precisamente, se $d(x,\xi)$ denota la $\{X_1,\ldots,X_p\}$-distanza di controllo fra x e ξ, e $\Gamma(x,\xi,t) = \Gamma(x,t,\xi,0)$ è la soluzione fondamentale di (4) con polo in $(\xi,0)$, allora esiste una costante $M>0$, dipendente solo da $X_1,\ldots,X_p$, tale che se $t>0$

$$(5) \qquad \frac{1}{M|B_d(x,\sqrt{t})|} \exp\left(-\frac{Md(x,\xi)^2}{t}\right) \leq \Gamma(x,\xi,t) \leq \frac{M}{|B_d(x,\sqrt{t})|} \exp\left(-\frac{d(x,\xi)^2}{Mt}\right),$$

mentre $\Gamma(x,\xi,t) \equiv 0$ per $t \leq 0$. La (5) è dovuta a diversi autori: Sanchez-Calle [S], Jerison e Sanchez-Calle [JS], Kusuoka e Stroock [KS 1&2]. In (5) $B_d(x,\sqrt{t}) = \{\xi \in R^n \mid d(x,\xi) < \sqrt{t}\}$ e $|B_d(x,\sqrt{t})|$ = misura di Lebesgue di $B_d(x,\sqrt{t})$.

Se si prende $d(x,\xi) = |x-\xi|$, allora $|B_d(x,\sqrt{t})| = \omega_n t^{n/2}$, cosicché (5) diventa

$$(6) \qquad C_1 K_{\alpha_1}(x-\xi,t) \leq \Gamma(x,\xi,t) \leq C_2 K_{\alpha_2}(x-\xi,t),$$

dove K_{α_i} è la soluzione fondamentale di $\alpha_i\Delta - D_t$, per certi $\alpha_i>0$, $i=1,2$. Per equazioni uniformemente paraboliche la (6) fu dimostrata da Aronson nel 1968 [A] usando la disuguaglianza di Harnack. Nel 1986 Fabes e Stroock [FS], rovesciando il punto di vista di Aronson, hanno ridimostrato la disuguaglianza di Harnack dopo aver stabilito la (6) servendosi delle idee contenute nel famoso lavoro di Nash del 1958, [N]. Usando un approccio simile, Kusuoka e Stroock hanno provato la disuguaglianza di Harnack per (4) partendo dalla (6), [KS 1 & 2]. In tale disuguaglianza di Harnack la geometria parabolica (euclidea)

$B(x,\sqrt{r})$ x $(t-r,t)$ è rimpiazzata dalla geometria $B_d(x,\sqrt{r})$ x $(t-r,t)$, dove B_d è la palla nella metrica di controllo di $X_1,\dots,X_p$.

Da una parte, l'equazione di Kolmogorov ha un comportamento parabolico in quanto la sua soluzione fondamentale

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{3}{2\pi}(t-\tau)^{-2}\exp[-\frac{|y-\eta|^2}{4(t-\tau)} - \frac{3}{(t-\tau)^3}|z-\zeta-\frac{t-\tau}{2}(y+\eta)|^2] \ , & t>\tau \\ 0 \ , & t\leq\tau, \end{cases}$$

è supportata in un semispazio. D'altra parte, le variabili non evolutive (y,z) in (1) giocano un ruolo molto diverso da quello giocato dalla variabile $x\in R^n$ in (4).

Per sottolineare ulteriormente la diversità di (1) e (4) osserviamo che se una disuguaglianza di Harnack di tipo parabolico valesse per (1), allora fissato un punto $Q = (\bar{y},0,0)\in R^3$, per ogni intorno W di Q si avrebbe per $P_t = (\bar{y},0,t)$, $t>0$,

$$(8)\qquad \lim_{|t|\to 0}\ \Big(\sup_{u\in H^+(w)}\frac{u(P_t)}{u(Q)}\Big) < +\infty.$$

Fissato un punto $(y_0,z_0,t_0)\in R^3$, con $t_0>0$, e posto

$$u(y,z,t) \ \underline{\text{def}} \begin{cases} (t-t_0)^{-2}\exp[-\frac{|y-y_0|^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3}|z-z_0-\frac{(t-t_0)}{2}(y+y_0)|^2 \ , & t>t_0, \\ 0 \ , & t\leq t_0 \ , \end{cases}$$

allora $u\geq 0$ in R^3 e $Lu = 0$ in $R^3\setminus\{(y_0,z_0,t_0)\}$. Se $Q = (\bar{y},0,0)$, con $\bar{y}\neq 0$, e se per $\theta\in(0,1)$ $P_{t_0} = (\bar{y},0,\theta t_0)$, poniamo

$$\lambda = \frac{z_o}{|t_o|} \qquad a = \frac{\bar{y}-y_o}{2} \quad , \quad b = \frac{\bar{y}+y_o}{2} \quad .$$

Allora

$$(9) \qquad \frac{u(P_{to})}{u(Q)} = \frac{1}{\theta^2} \exp\{-\frac{3}{|t_o|}(\frac{1}{\theta}-1)[((\frac{1}{\theta}+1)\lambda+b)^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{\lambda^2}{\theta}]\}$$

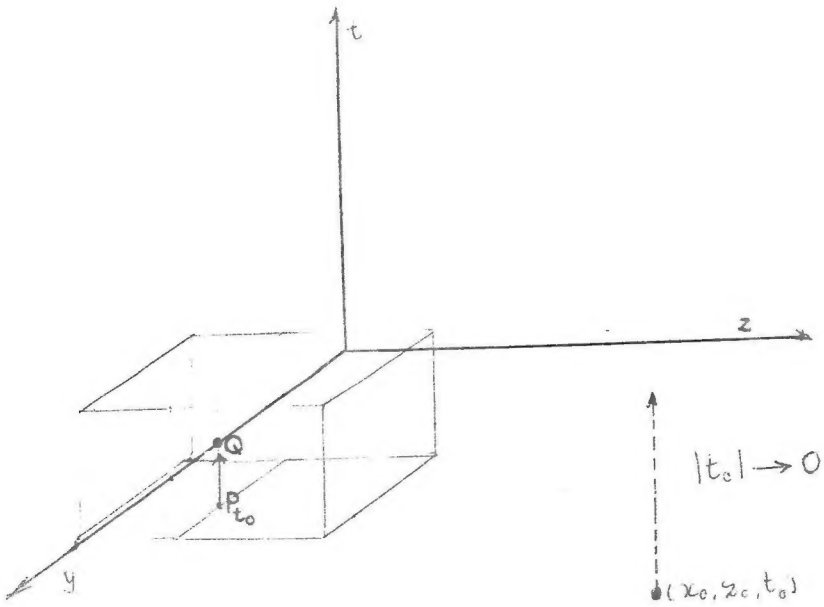
Ora scegliamo y_o e z_o tali che

$$(\frac{1}{\theta}+1)\lambda + b = 0 \quad , \quad \frac{a^2}{3} - \frac{\lambda^2}{\theta} < 0$$

(ciò è possibile in quanto $\bar{y} \neq 0$). Si ha così da (9)

$$\lim_{|t_o|\to 0} \frac{u(P_{t_o})}{u(Q)} = +\infty.$$

Ciò contraddice la (8) (si veda la fig. qui sotto)



Il risultato che intendo discutere è nato da un tentativo di stabilire una disuguaglianza di Harnack uniforme per una classe di equazioni che contenesse la (1) e la (2). Alla base di un tale tentativo sta la comprensione della geometria corretta per cui una disuguaglianza di Harnack possa valere. L'idea chiave del metodo adottato in [GL] è che la geometria esatta di una disuguaglianza di Harnack uniforme è determinata dagli insiemi di livello della soluzione fondamentale. Per equazioni quali (1) o (2) tale geometria è piuttosto intricata e, da un punto di vista intrinseco, il caso (1) dei coefficienti costanti nella parte principale non è molto diverso dal caso (2), in cui i coefficienti sono variabili.

Per tal motivo s'è pensato di concentrare l'attenzione su una classe d'equazioni che contenga (1) e (2), quando in quest'ultima (a_{ij}) è una matrice costante, e $a_i = a = 0$. Nel seguito n,k,ℓ sono degli interi non negativi, con $n = k+\ell$. Punti $x \in R^n$ saranno denotati con $x = (y,z)^T$, dove $y \in R^k$, $z \in R^\ell$. Si consideri l'equazione

$$(10) \qquad Lu = \operatorname{div}_y(A\nabla_y u) - By \cdot \nabla_z u - D_t u = 0 \quad \text{in} \quad R^{n+1},$$

dove

$$A = (a_{ij}) \ , \ i,j=1,\dots,k \ , \quad B = (b_{mj}) \ , \ m = 1,\dots,\ell, \quad j=1,\dots,k$$

e

$$(11) \qquad \begin{cases} A = A^T \ \text{ e definita positiva} \\ C = (BAB^T)^{-1} \ \text{esiste ed è definita positiva.} \end{cases}$$

$\nabla_y u$, $\nabla_z u$ denotano i vettori colonna $\nabla_y u = (D_{y_1} u,\dots,D_{y_k} u)^T$, $\nabla_z u = (D_{z_1} u,\dots,D_{z_\ell} u)^T$. Si può dimostrare che (11) implica che L verifica la condizione di Hörmander sul rango dell'algebra di Lie, ved. [H] oppure [Ku]. Una soluzione fondamenta-

le per (10) è stata costruita esplicitamente in [H] e [Ku]:

$$(12)\quad \Gamma(x,t;\xi,\tau)=\Gamma(y,z,t;\eta,\zeta,\tau)=\begin{cases} \chi(t-\tau)^{-\gamma}\exp\left[-\frac{|y-\eta|^2_A}{4(t-\tau)}-\frac{3}{(t-\tau)^3}\left|z-\zeta-\frac{t-\tau}{2}B(y+\eta)\right|^2_C\right], & t>\tau, \\ 0\ , \quad t\le\tau, \end{cases}$$

dove

$$(13)\qquad |y|^2_A = A^{-1}y\cdot y\ ,\ y\in R^k\ ,\ |z|^2_C = Cz\cdot z\ ,\quad z\in R^\ell,$$

$$(14)\qquad \gamma = \frac{3k+\ell}{2} = \frac{n}{2}+\ell\ ,\quad \chi = \pi^{-n/2}\,\frac{3^{\ell/2}}{2^k}\left(\frac{\det C}{\det A}\right)^{1/2}.$$

Se $(x,t)\in R^{n+1}$, e $r>0$, si pone

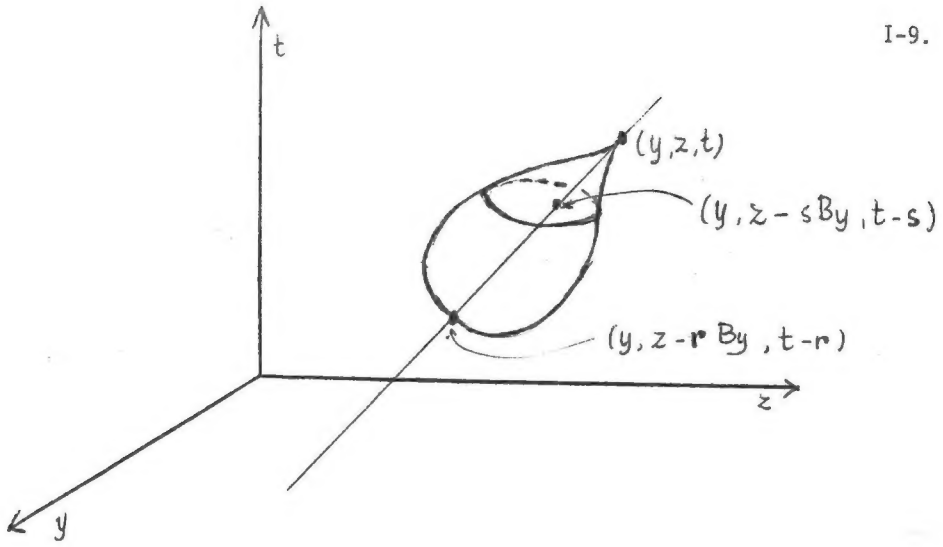
$$(15)\qquad \Omega_r(x,t) = \{(\xi,\tau)\in R^{n+1}\ \Big|\ \Gamma(x,t;\xi,\tau) > \frac{\chi}{r^\gamma}\}$$

dove χ e γ sono come in (14). $\Omega_r(x,t)$ prende il nome di *palla di Kolmogorov* centrata in (x,t) di raggio r. La geometria dell'insieme $\Omega_r(x,t)$ cambia con la posizione del centro (x,t). Una descrizione equivalente è

$$(16)\qquad \Omega_r(x,t) = \{(\xi,\tau)\in R^{n+1}\Big|\frac{1}{4}|y-\eta|^2_A + \frac{3}{(t-\tau)^2}\left|z-\zeta-\frac{t-\tau}{2}B(y+\eta)\right|^2_C$$

$$< \gamma(t-\tau)\ell n\left(\frac{r}{t-\tau}\right)\ ,\quad t-r<\tau<t\}.$$

Dalla (16) si riconosce (v. figura più sotto) che la sezione di $\Omega_r(x,t)$ con il piano $\tau = t-s$, $0\le s\le r$, è un ellissoide n-dimensionale con centro in $(y,z - sBy, t-s)$. Al variare di s in $[o,r]$ tale punto descrive un segmento di linea retta che è parallelo all'asse delle t solo se $y = 0$.

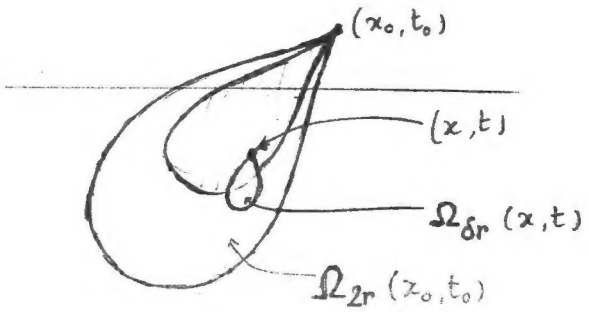


L'approccio in [GL] è di tipo geometrico, ispirato alla classica dimostrazione della disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche. Gli ingredienti essenziali sono un lemma geometrico relativo ai livelli della soluzione fondamentale $\Omega_r(x,t)$, e formule di media ad hoc per soluzioni di (10). Il lemma geometrico gioca, in questo contesto, il ruolo svolto nella metrica euclidea della disuguaglianza triangolare. Quest'ultima si può esprimere in modo suggestivo come segue: fissato $x_0 \in R^n$, e $r > 0$, per ogni $x \in B(x_0;r)$ e ogni $\delta \in (0,1)$ la palla $B(x;\delta r)$ è contenuto in $B(x_0;2r)$.

LEMMA GEOMETRICO. *Siano* $(x_0,t_0) \in R^{n+1}$ *e* $r>0$ *fissati. Allora, per ogni* $\varepsilon>0$ *esiste* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *tale che se* $(x,t) \in \Omega_r(x_0,t_0)$ *e* $t_0 - t \geq \varepsilon r$, *si ha*

$$\Omega_{\delta r}(x,t) \subset \Omega_{2r}(x_0,t_0). \tag{17}$$

La figura qui sotto illustra la geometria.



Le formule di media a cui si è fatto riferimento prima sono opportune derivazioni del seguente risultato di rappresentazione

TEOREMA 1. *Siano* $u \in C^{\infty}(R^{n+1})$, $(x_0,t_0) \in R^{n+1}$ *e* $r>0$. *Allora*

$$(18) \qquad \int_{\Omega_r(x_0,t_0)} u(x,t)E_r(x_0,t_0;x,t)dx\,dt = u(x_0,t_0)$$

$$+ \frac{\gamma}{r^{\gamma}} \int_0^r \rho^{\gamma} \Big(\int_{\Omega_\rho(x_0,t_0)} Lu(x,t)[\Gamma(x_0,t_0;x,t) - \frac{\chi}{\rho^{\gamma}}]dx\,dt \Big) \frac{d\rho}{\rho} ,$$

dove

$$(19) \qquad E_r(x_0,t_0;x,t) = \frac{\chi}{r^{\gamma}} \frac{A(\nabla_y \Gamma(x_0,t_0;x,t)) \cdot \nabla_y \Gamma(x_0,t_0;x,t)}{\Gamma^2(x_0,t_0;x,t)}$$

Notiamo che se Lu = 0, allora la (18) dà la formula di media

$$(20) \qquad u(x_0,t_0) = \int_{\Omega_r(x_0,t_0)} u(x,t)\, E_r(x_0,t_0;x,t)dx\,dt.$$

Il Teorema 1 può essere usato per ottenere un'assai utile rappresenzazione del la derivata "radiale" dell'operatore di media.

TEOREMA 2. *Siano* $u \in C^{\infty}(R^{n+1})$, $(x_0,t_0) \in R^{n+1}$ *e* $r>0$. *Poniamo*

$$(21) \qquad u_r(x_0,t_0) = \int_{\Omega_r(x_0,t_0)} u(x,t)\, E_r(x_0,t_0;x,t)dx\,dt .$$

Allora

$$(22)\qquad \frac{d}{dr}u_r(x_o,t_o) = \frac{\chi\gamma}{r^{\gamma+1}}\int_{\Omega_r(x_o,t_o)} Lu(x,t)\,\ell n[\frac{r^\gamma}{\chi}\Gamma(x_o,t_o;x,t)]dx\,dt.$$

COROLLARIO 1. *Se* $Lu\geq 0$, *allora per* $0<r<R$ *e* $\theta\in(0,1)$ *esiste* $C=C(n,\theta)$ *tale che*

$$u_R(x_o,t_o)-u_r(x_o,t_o)\geq C(\frac{1}{r^\gamma}-\frac{1}{R^\gamma})\int_{\Omega_{\theta r}(x_o,t_o)} Lu(x,t)dx\,dt.$$

In particolare, la funzione $r\to u_r(x_o,t_o)$ *è crescente.*

Per quanto appagante da un punto di vista estetico il Teorema 1 presenta un inconveniente serio nelle applicazioni. Ciò è dovuto al fatto che il nucleo E_r che compare nella (18) è illimitato sugli insiemi $\Omega_r(x_o,t_o)$. A causa di ciò la (18) non si presta, ad esempio, a provare la disuguaglianza di Harnack. Nondimeno, la (18) contiene qualcosa che può essere favorevolmente utilizzato: la struttura particolare del nucleo. L'idea è semplice, ma feconda. Sia $h\in N$ e denotiamo con Δ_h il Laplaciano su R^h. Se L è come in (10) definiamo

$$(23)\qquad L_h = L + \Delta_h \quad \text{in} \quad R^{n+h+1}.$$

Se per $u\in C^\infty(R^{n+1})$ e $w\in R^h$ poniamo

$$u_h(x,w,t) = u(x,t),$$

allora

$$L_h u_h(x,w,t) = Lu(x,t).$$

Inoltre, denotando con Γ_h la soluzione fondamentale di L_h in (23), un calcolo dà

$$\Gamma_h(x_o,w_o,t_o;x,w,t) = \Gamma(x_o,t_o;x,t)\,K_h(w_o-w,t_o-t)$$

dove K_h è il nucleo di Gauss-Weierstrass in R^{h+1}. Posto

$$\hat{\Omega}_r(x_o,w_o,t_o)=\{(x,w,t)\in R^{n+h+1}\,\Big|\,\Gamma_h(x_o,w_o,t_o;x,w,t) > \frac{\chi_h}{r^{\gamma h}}\},$$

con

$$\gamma_h = \gamma + \frac{h}{2} \quad , \quad \chi_h = (4\pi)^{-h/2}\chi \ ,$$

un'applicazione della (22) del Teorema 2 a L_h, u_h dà

$$(24)\qquad (u_h)_r(x_o,w_o,t_o)=u(x_o,t_o) + \int_0^r \frac{\chi_h\gamma_h}{\gamma_h}\int_{\hat{\Omega}_\rho(x_o,w_o,t_o)} Lu(x,t)\,\&n\,[\frac{\rho^{\gamma_h}}{\chi_h}\Gamma_h(x_o,w_o,t_o;x,w,t)]$$

$$dxdwdt\,\frac{d\rho}{\rho}$$

Partendo dalla (24), ponendo

$$R_r(t_o-t)^2 = 4(t_o-t)\,\&n\,[\frac{r^{\gamma_h}\Gamma(x_o,t_o;x,t)}{\chi(t_o-t)^{h/2}}]$$

$$\Omega_r^{(h)}(x_o,t_o)=\{(x,t)\in R^{n+1}\,\Big|\,(t_o-t)^{-h/2}\Gamma(x_o,t_o,x,t) > \frac{\chi_h}{r^{\gamma h}}\},$$

$$(25)\qquad E_r^{(h)}(x_o,t_o;x,t)= \frac{\omega_h\chi_h}{r^{\gamma h}}R_r(t_o-t)^h\ \frac{A(\nabla_y\Gamma(x_o,t_o;x,t)\cdot\nabla_y\Gamma(x_o,t_o;x,t)}{\Gamma^2(x_o,t_o;x,t)} +$$

$$+\frac{h}{h+2}\,\frac{R_r(t_o-t)^2}{(t_o-t)^2} \ ,$$

si perviene al seguente

TEOREMA 3. *Siano* $u\in C^{\infty}(R^{n+1})$, $(x,t)\in R^{n+1}$ *e* $r>0$. *Allora*

$$(26)\qquad \int_{\Omega_r^{(h)}(x_0,t_0)} u(x,t)E_r^{(h)}(x_0,t_0;x,t)dxdt = u(x_0,t_0) +$$

$$+ \frac{2\gamma+h}{h+2}\omega_h(4\pi)^{-h/2}\chi \int_0^r \rho^{-\gamma h}\Big(\int_{\Omega_\rho^{(h)}(x_0,t_0)} Lu(x,t)\,\frac{R_p(t_0-t)^{h-2}}{4(t_0-t)}\,dxdt\Big)\frac{d\rho}{\rho}\ .$$

COROLLARIO 2. *Se* $Lu=0$ *allora*

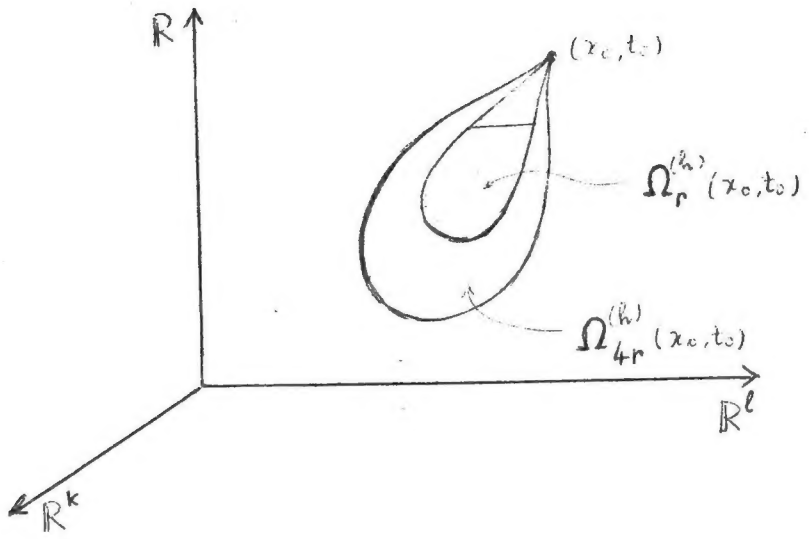
$$u(x_0,t_0) = \int_{\Omega_r^{(h)}(x_0,t_0)} u(x,t)E_r^{(h)}(x_0,t_0;x,t)dxdt.$$

Quantunque simile al Teorema 1, il Teorema 3 ha, rispetto a quello, un notevole vantaggio: il nucleo $E_r^{(h)}$, definito dalla (25), che compare in (26) diventa sempre più regolare al crescere di h. In particolare, $E_r^{(h)}$ *è limitato su* $\Omega_r^{(h)}$, purché $h>2$.

Avendo osservato che il Lemma Geometrico vale immutato se in esso si sostituiscono gli insiemi Ω_r con $\Omega_r^{(h)}$, con la nuova versione del lemma e con il Corollario 2 si giunge infine a dimostrare la seguente

DISUGUAGLIANZA DI HARNACK UNIFORME. *Siano* $(x_0,t_0)\in R^{n+1}$, $r>0$, *e sia* $u\geq 0$ *una soluzione di* (10) *in* $\Omega_{4h}^{(h)}(x_0,t_0)$, *dove* $h\in N$, $h>2$, *è fissato. Per ogni* $\varepsilon\in(0,1)$ *esiste una costante positiva* $C=C(\varepsilon,n,h,L)$ *tale che*

$$(27)\qquad \sup_{\substack{(x,t)\in\Omega_r^{(h)}(x_0,t_0)\\ t_0-t\geq \varepsilon r}} u(x,t) \leq C\ u(x_0,t_0).$$



A conclusione di questa nota va rilevato come la disuguaglianza di Harnack per (10) permetta di ottenere una disuguaglianza di Harnack uniforme per la seguente notevole classe d'equazioni. In R^n consideriamo l'equazione

$$(28) \qquad Eu = \mathrm{div}_y(A\nabla_y u) - By \cdot \nabla_z u = 0.$$

Le soluzioni di (28) si possono pensare come gli stati "stazionari" della (10). Si osservi, tuttavia, che, seppure degenere, l'operatore E in (28) è esso stesso un operatore "evolutivo". Ad esempio, se $n = k+1$, cosicché $\ell=1$, allora

$$Eu = \mathrm{div}_y(A\nabla_y u) - ByD_z u = 0$$

è un'equazione di tipo parabolico diretto-retrogrado, che cambia tipo sull'iperpiano $H = \{(y,z)\in R^{k+1} \mid By = 0\}$.

BIBLIOGRAFIA

[A] D.G. ARONSON, Nonnegative solutions of linear parabolic equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. 22 (1968), 607-694.

[FS] E. FABES and D.W. STROOCK, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old ideas of Nash, Arch. Ratl. Mech. Anal. 96, no. 4 (1986), 327-338.

[GL] N. GAROFALO and E. LANCONELLI, Level sets of the fundamental solution and Harnack inequality for degenerate equations of Kolmogorov type, apparirà su Trans. Amer. Math. Soc..

[H] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math 119 (1967), 147-171.

[I] A.M. IL'In, On a class of ultraparabolic equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 159 (1964), 1214-1217.

[JS] D. JERISON and A. SANCHEZ-CALLE, Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields, Indiana Univ. Math. J. (1986).

[K] A. KOLMOGOROV, Zufällige Bewegungen, Annals of Math. 35, no. 1 (1934), 116-117.

[KU] L.P. KUPCOV, Mean value theorem and a maximum principle for Kolmogorov's equation, Math. Notes 15 (1974), 280-286.

[KS1] S. KUSUOKA and D.W. STROOCK, Applications of Malliavin calculus, III, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. 34 (1987), 391-442.

[KS2] ————————————, Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator, Annals of Math. 127 (1988), 165-189.

[N] J. NASH, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. Math. 80 (1958), 931-954.

[S] A. SANCHEZ-CALLE, Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields, Inv. Math. 78 (1984), 143-160.

[W] M. WEBER, The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 24-37.